高三数学复习易漏点3
二项式定理

教育部中小学名师领航工程
北京师范大学培养基地
学员陕西省汉中中学王建华

2020年2月

[考纲要求]

1. 能用计数原理证明二项式定理.

2. 会用二项式定理解决与二项展开式有关的简单问题.

1 突破点一　用计数原理证明二项式定理

2 突破点二　二项式的通项公式及应用

突破点一用计数原理证明二项式定理

阅读北师大版选修2-3　第23页---第25页

二项式定理

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^r a^{n-r} b^r + \cdots + C_n^n b^n \ (n \in N^*)$$

每个都不取b的情况有1种,即C_n^0 ,则a^n前的系数为C_n^0

恰有1个取b的情况有C_n^1种，则$a^{n-1}b$前的系数为C_n^1

恰有2个取b的情况有C_n^2 种，则$a^{n-2}b^2$前的系数为C_n^2

……

恰有r个取b的情况有C_n^r 种，则$a^{n-r}b^r$前的系数为C_n^r

……

恰有n个取b的情况有C_n^n 种，则b^n前的系数为C_n^n

1．二项式定理

二项展开式	公式$(a+b)^n=$ $\underline{C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+C_n^nb^n}$ $(n\in N^*)$叫做二项式定理
二项式的通项	$T_{k+1}=$ $\underline{C_n^ka^{n-k}b^k}$ 为展开式的第$\underline{k+1}$项

2.二项式系数与项的系数

二项式系数	二项展开式中各项的系数 $C_n^r(r\in\{0，1，\cdots，n\})$叫做第 $r+1$ 项的二项式系数
项的系数	项的系数是该项中非字母因数部分，包括符号等，与二项式系数是两个不同的概念．如$(a+bx)^n$ 的展开式中，第 $r+1$ 项的系数是 $C_n^ra^{n-r}b^r$

判断题(对的打“√”，错的打“×”)

(1)$C_n^r a^{n-r} b^r$ 是$(a+b)^n$的展开式中的第 r 项.　　　　(　　)

(2)在$(a+b)^n$的展开式中，每一项的二项式系数与 a，b 无关.（　　）

(3)$(a+b)^n$展开式中某项的系数与该项的二项式系数相同.(　　)

答案：(1)×　(2)√　(3)√

突破点二　二项式的通项公式及应用

△形如$(a+b)^n$的展开式问题

[例 1](2018·全国卷Ⅲ)$\left(x^2+\dfrac{2}{x}\right)^5$的展开式中$x^4$的系数为

( )

A．10　　B．20　　C．40　　D．80

[解析]　由二项式通项得$T_{r+1}=C_5^r\cdot(x^2)^{5-r}\cdot\left(\dfrac{2}{x}\right)^r=C_5^r\cdot 2^r\cdot x^{10-3r}$，

令$10-3r=4$，得$r=2$.故展开式中x^4的系数为$C_5^2\cdot 2^2=40$.

[答案]　C

[方法技巧]

二项展开式问题的常见类型及解法

(1)求展开式中的特定项或其系数．可依据条件写出第 $k+1$ 项，再由特定项的特点求出 k 值即可．

(2)已知展开式的某项或其系数求参数．可由某项得出参数项，再由通项公式写出第 $k+1$ 项，由特定项得出 k 值，最后求出其参数．

△形如$(a+b)^n(c+d)^m$的展开式问题

[例 2](2018·广东一模)$\left(x+\frac{1}{x}\right)(1+2x)^5$的展开式中，$x^3$的系数为 (　　)

A．120　B．160　C．100　D．80

[解析] $\left(x+\frac{1}{x}\right)(1+2x)^5=x(1+2x)^5+\frac{1}{x}(1+2x)^5$，

∵$x(1+2x)^5$的展开式中含x^3的项为$x\cdot C_5^2(2x)^2=40x^3$，

$\frac{1}{x}(1+2x)^5$的展开式中含x^3的项为$\frac{1}{x}\cdot C_5^4(2x)^4=80x^3$，

∴x^3的系数为$40+80=120$．故选 A.

[答案] A

[方法技巧]

求解形如$(a+b)^n(c+d)^m$的展开式问题的思路

(1)若 n，m 中一个比较小，可考虑把它展开得到多个，如$(a+b)^2(c+d)^m=(a^2+2ab+b^2)(c+d)^m$，然后展开分别求解.

(2)观察$(a+b)(c+d)$是否可以合并，如$(1+x)^5(1-x)^7=[(1+x)(1-x)]^5(1-x)^2=(1-x^2)^5(1-x)^2$.

(3)分别得到$(a+b)^n$，$(c+d)^m$的通项公式，综合考虑.

△形如$(a+b+c)^n$的展开式问题

[例 3]　(1)(2019·枣阳模拟)$(x^2+x+y)^5$的展开式中x^5y^2的系数为　(　　)

A．10　B．20　C．30　D．60

[解法一]　$(x^2+x+y)^5$的二项式通项为$T_{r+1}=C_5^r(x^2+x)^{5-r}\cdot y^r$，

令$r=2$，则$T_3=C_5^2(x^2+x)^3y^2$，

又$(x^2+x)^3$的二项式通项为$C_3^k(x^2)^{3-k}\cdot x^k=C_3^kx^{6-k}$，

令$6-k=5$，则$k=1$，

所以$(x^2+x+y)^5$的展开式中，x^5y^2的系数为$C_5^2C_3^1=30$，故选C.

[答案]　C

[例 3]　(1)(2019·枣阳模拟)$(x^2+x+y)^5$的展开式中x^5y^2的系数为　(　　)

A．10　　B．20　　C．30　　D．60

[解法二]　$(x^2+x+y)^5$的展开式是5个(x^2+x+y)相乘的结果，则x^5y^2可以看出从5个因式中选2个因式中的y、从余下的3个因式中选1个因式中的x、从余下的2个因式中选式子中的x^2，所以$(x^2+x+y)^5$的展开式中，x^5y^2的系数为$C_5^2C_3^1C_2^2=30$，故选C.

[答案]　C

(2)(2019·太原模拟)$(2x+\frac{1}{x}-1)^5$的展开式中常数项是________.

[解法一] $(2x+\frac{1}{x}-1)^5$的展开式是5个$(2x+\frac{1}{x}-1)$相乘的结果，则常数项

①从5个因式中选1个因式中的2*x*、从余下的4个因式中选1个因式中的$\frac{1}{x}$、从余下的3个因式中选式子中的(-1)，记：$C_5^1(2x)C_4^1(\frac{1}{x})C_3^3(-1)^3$

②从5个因式中选2个因式中的2*x*、从余下的3个因式中选2个因式中的$\frac{1}{x}$、从余下的1个因式中选式子中的(-1)，记：$C_5^2(2x)^2C_3^2(\frac{1}{x})^2C_1^1(-1)^1$

③从5个因式选式子中的(-1)，记：$C_5^5(-1)^5$

常数项为$C_5^1(2x)C_4^1(\frac{1}{x})C_3^3(-1)^3+C_5^2(2x)^2C_3^2(\frac{1}{x})^2C_1^1(-1)+C_5^5(-1)^5=-161$.

[答案] －161

(2)(2019·太原模拟)$(2x+\frac{1}{x}-1)^5$的展开式中常数项是________.

[解法二]　由$(2x+\frac{1}{x}-1)^5=(-1+2x+\frac{1}{x})^5$，

则二项式通项为$(-1)^{5-r}C_5^r(2x+\frac{1}{x})^r,(r=0,1,2,3,4,5)$

其中$(2x+\frac{1}{x})^r$的二项式通项为$2^{r-t}C_r^t x^{r-2t},(t=0,\cdots,r)$.

令$r-2t=0$，得$\begin{cases}r=0,\\t=0\end{cases}$或$\begin{cases}r=2,\\t=1\end{cases}$或$\begin{cases}r=4,\\t=2,\end{cases}$

所以$(2x+\frac{1}{x}-1)^5$的展开式中的常数项为

$(-1)^5C_5^0+(-1)^3C_5^2\times 2C_2^1+(-1)^1C_5^4\times 2^2C_4^2=-161$.

[答案]　-161

[方法技巧]　三项展开式问题的破解技巧

破解$(a+b+c)^n$的展开式的特定项的系数题，常用如下技巧：

①　若三项能用完全平方公式，那当然比较简单；

②　若三项不能用完全平方公式，只需根据题目特点，把“三项”当成“两项”看，再利用二项展开式的通项公式去求特定项的系数；

③　把$(a+b+c)^n$看成 n 个$(a+b+c)$的积，利用组合知识分析项的构成.

谢 谢 大 家！